4. Hausübung zur Fortgeschrittenen Quantentheorie, SS 2010

(abzugeben am Dienstag, 08.06.2010)

Aufgabe H10 *Phasendämpfung für den harmonischen Oszillator* (5 Punkte)

Als Modell für die Phasendämpfung des harmonischen Oszillators $(a, a^\dagger)$ dient folgende Kopplung an die Umgebung $(b, b^\dagger)$:

$$H_{\text{int}} \;=\; \Big(\sum_i \lambda_i \, b_i^\dagger b_i\Big)\, a^\dagger a \;\; .$$

Die Mastergleichung lautet im Wechselwirkungsbild

$$\hbar\, \dot{\varrho}_I \;=\; \Gamma\left(a^\dagger a\, \varrho_I\, a^\dagger a - \tfrac{1}{2}(a^\dagger a)^2 \varrho_I - \tfrac{1}{2}\varrho_I (a^\dagger a)^2\right) ,$$

wobei Γ als Streurate der Umgebungs-Photonen bei einfacher Besetzung des Oszillators interpretiert werden kann.

a) Lösen Sie die Mastergleichung in der Besetzungszahlbasis $\{|n\rangle\}$: Schreiben Sie zunächst $\varrho_I = \sum_{n,m} \varrho_{nm} \,|n\rangle\, \langle m|$, stellen Sie dann eine Differentialgleichung für ϱ_{nm} auf, und integrieren Sie diese.

b) Nehmen Sie nun an, dass der Oszillator zum Zeitpunkt $t = 0$ in dem „Schrödinger-Katzen“-Zustand

$$|\text{ cat}\,\rangle = \tfrac{1}{\sqrt{2}}\Big(|0\rangle + |n\rangle\Big)$$

präpariert ist. Wie groß ist gemäß a) die Dekohärenzrate dieses Zustands, d.h. die typische Zeitskala für den Zerfall der Nebendiagonalelemente der Dichtematrix?

Aufgabe H11 *Shannon-Entropie und von Neumann-Entropie* (5 Punkte)

Die Entropie einer klassischen Wahrscheinlichkeitsverteilung $\{p_1, ..., p_N\}$ lautet

$$H \;:=\; -\sum_{j=1}^{N} p_j \log p_j$$

und wird als Shannon-Entropie bezeichnet.
Die Entropie eines quantenmechanischen Zustands, der durch den Dichteoperator ϱ beschrieben wird, ist gegeben durch die von Neumann-Entropie

$$S \;:=\; -\operatorname{tr}(\varrho \log \varrho) \; .$$

Zeigen Sie, dass bei Präparation von nicht-orthogonalen Quantenzuständen mit Wahrscheinlichkeiten p_j diese beiden Entropien i.a. nicht identisch sind. Betrachten Sie hierzu das folgende Beispiel: Ein Spin-$\frac{1}{2}$-Teilchen werde mit *gleicher* Wahrscheinlichkeit in einem der drei Zustände

$$|\psi_1\rangle \;\doteq\; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} , \qquad |\psi_2\rangle \;\doteq\; \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} , \qquad |\psi_3\rangle \;\doteq\; \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

präpariert. Wie groß sind H und S?
Betrachten Sie nun die Verallgemeinerung, dass ein Spin-$\frac{1}{2}$-Teilchen mit gleicher Wahrscheinlichkeit in einem von N verschiedenen reinen Zuständen präpariert wird. Wie groß sind H und S im Grenzwert $N \to \infty$?

b.w.

Aufgabe H12 *Das „No-Cloning"-Theorem* (5 Punkte)

Nehmen Sie an, man könne einen unbekannten Quantenzustand von einem System in ein zweites kopieren, d.h. es gäbe eine unitäre Transformation U auf dem Produktraum mit $U\left|\psi\right\rangle\left|0\right\rangle = \left|\psi\right\rangle\left|\psi\right\rangle$ für *jeden* Zustand $\left|\psi\right\rangle$ eines Spin-$\frac{1}{2}$-Systems. Führen Sie diese Annahme mit zwei verschiedenen Argumenten zum Widerspruch (Wootters und Zurek 1982):

a) *Linearität von U*: Betrachten Sie die Wirkung von U auf die Basiszustände $\left|0\right\rangle\left|0\right\rangle$ und $\left|1\right\rangle\left|0\right\rangle$, sodann auf die Linearkombination $\alpha\left|0\right\rangle\left|0\right\rangle + \beta\left|1\right\rangle\left|0\right\rangle$.

b) *Erhaltung des Skalarprodukts*: Eine unitäre Transformation erhält bekanntlich das Skalarprodukt. Nehmen Sie an, dass zwei nicht-orthogonale Zustände kopiert werden können, und betrachten Sie deren Skalarprodukt vor und nach Anwendung der hypothetischen Transformation U.

Anmerkung: Der *Anfangszustand* des zweiten Systems wird vorgegeben und kann willkürlich gewählt werden, in diesem Fall als $\left|0\right\rangle$.